සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved)

№ 136

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1990 (විශේෂ–1991)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1990 (Special-1991)

(01) ශුද්ධ ගණිතය I (01) Pure Mathematics I	01 S | I

පැ තුනයි/Three hours
ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

1. (i) $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 - \left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 \equiv n^3$

සහ

$\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{8}(n+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})^3 - \frac{3}{8}(n-\frac{1}{2}) \equiv n^3$

සර්වසාම්‍ය සත්‍යාපනය කර

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 \quad \text{සහ} \quad \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} r^3$$

සෙවීමට ඒවා භාවිත කරන්න.

(ii) ගණිත අභ්‍යුහනය පිළිබඳ මූලධර්මය භාවිත කර
$2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$
යන්න 54 හි ගුණාකාරයක් බව සාධනය කරන්න.

2. (i) a, b සහ c තාත්වික නම්

$$(a^2 + b^2)x^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)x + b^2 + c^2 = 0$$

සමීකරණයෙහි මූල තාත්වික විය යුතු බව සාධනය කරන්න.

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$ සහ $a'x^2 + b'x + c' = 0$ සමීකරණවල මූලවල අනුපාත සමාන නම්

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{b'^2}{a'c'}$$

බව පෙන්වන්න.

(iii) $$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2}$$

අසමානතාව සපුරාලන x හි අගයන් සොයන්න.

3. (i) $f(x)$, සහ $g(x)$ වූ කලී $3x^2 + x - 2$ න් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $2x + 1$ ද $x^2 - 1$ න් $g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $x + 2$ ද වන පරිදි බහුපද දෙකකි.

$f(x) + g(x)$ බහුපදයේ ඒකජ සාධකයක් සොයා එම ඒකජ සාධකයෙන් $f(x)\,g(x)$ බෙදූ විට ශේෂය -1 බව සාධනය කරන්න.

(ii) $(x + y + z)^5 - x^5 - y^5 - z^5$ හි සාධක සොයන්න.

4. n ධන නිඛිල දර්ශකයක් සඳහා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කරන්න.
$z = \cos\theta + i\sin\theta$ නම්,

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$$

බව පෙන්වන්න.
ඒ නයින් හෝ අන්‍යක්‍රමයකින් හෝ

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

බව පෙන්වන්න.

(a) $\cos 5\theta = 0$ සමීකරණයේ මූල සලකා, $4\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10} = \sqrt{5}$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්

$$\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$$

බව පෙන්වන්න.

(b) $\cos 5\theta = 5\cos\theta$ සමීකරණය සපුරාලන θ හි තාත්වික අගයන් සියල්ල සොයන්න.

5. සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් සඳහා 'මාපාංකය' සහ 'විස්තාරය' යන පද අර්ථ දක්වන්න.
z_1, z_2 සහ $\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{2}\right)z_2 - \left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)z_1$ සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවන් ආගන්ඩ් සටහනෙහි (වාමාවර්තව නම් කරන ලද) A, B සහ C ලක්ෂ්‍යවලින් පිළිවෙලින් නිරූපණය කරයි. ABC කෝණය $120°$ බව ද $AB = BC$ බව ද පෙන්වන්න.
$ABCDEF$ සවිධි ෂඩස්‍රයක් ද U එහි කේන්ද්‍රය ද නම් z_1 සහ z_2 මගින් E සහ U නිරූපණය කරන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.
තම U කේන්ද්‍රය වටා ෂඩස්‍රය දක්ෂිණාවර්ත ව $45°$ කින් භ්‍රමණය කරනු ලබන්නේ නම් E හි නව පිහිටීම මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව z_1 සහ z_2 ඇසුරෙන් සොයන්න.

6. (i) **"RELATIVISTIC"** යන වචනයෙහි අකුරුවල පිළියෙළකිරීම් සංඛ්‍යාව සොයන්න.
මින් කවර සංඛ්‍යාවක "I" අක්ෂර තුන ම එකට පැමිණෙයි ද?
I අක්ෂර 2 ක් එකට ද තෙවැනි I අනෙක් 2 ට යාබදව නොවී ද ඇත්තේ, පිළියෙළ කිරීම් කවර සංඛ්‍යාවක ද ?

(ii) රිදී කාසි 8 ක් ද තඹ කාසි 4 ක් ද බෑගයක ඇත. මේවා සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් වේ. වරකට 7 බැගින් කී ආකාරයකට කාසි තෝරා ගත හැකි ද? මේවායින් කවර සංඛ්‍යාවක අවම වශයෙන් එක් රිදී කාසියක් වත් ඇත් ද?

7. n ධන නිඛිලයක් විට, $(a + x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා එය සාධනය කරන්න.
$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{12x^2}\right)^{15}$ හි ප්‍රසාරණයේ x ගෙන් ස්වායත්ත පදය ද $x = \frac{1}{4}$ වන විට විශාලතම පදය ද සොයන්න.

$$(1 + x)^4 (1 - x^2)^n \quad \text{සහ} \quad (1 - x)^n (1 + x)^{n+4}$$

ප්‍රසාරණවල x^{2r} ($n \geqslant 2r$) හි සංගුණක සොයා

$$(-1)^r \left[nC_r - {}^{6n}C_{r-1} + {}^nC_{r-2} \right] = {}^nC_0\,{}^{n+4}C_{2r} - {}^nC_1\,{}^{n+4}C_{2r-1} + \ldots\ldots + {}^nC_{2r}\,{}^{n+4}C_0.$$

බව පෙන්වන්න.

8. (i) ප්‍රමූලධර්ම මගින් $\sqrt{1 - x^2}$ හි ව්‍යුත්පන්නය සොයන්න.

(ii) $y = \tan^{-1}\frac{1}{1 - x^2}$ සහ $z = \sin^{-1} x$ නම් $\frac{dy}{dz}$ සොයන්න.

(iii) $x = \sqrt{1 - z^2}$ ද x හි ශ්‍රිතයක් y ද වේ.
$\frac{dy}{dz}$ සහ $\frac{d^2y}{dz^2}$ මගින් $\frac{d^2y}{dx^2}$ ප්‍රකාශ කරන්න.

$$(1 - z^2)\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + z^2y = 0 \quad \text{නම්}$$

$$x \neq 0 \text{ සඳහා } \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \text{ බව සාධනය කරන්න.}$$

9. (i) $x = \pi - y$ ආදේශ කිරීමෙන් $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx$ අනුකලය 0 සහ $\frac{\pi}{2}$ සීමා අතර අනුකලයකට පරිණාමනය කරන්න.

ඒ නයින්, $$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x}\, dx = \frac{\pi^2}{4}$$ බව පෙන්වන්න.

(ii) m සහ n ධන නිඛිල වන විට,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin (2m + 1)\, x\, dx = (-1)^m \frac{n}{(2m + 1)^2} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$$

$$- \frac{n(n - 1)}{(2m + 1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{n-2} \sin (2m + 1)x\, dx$$

බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^4 \sin 3x\, dx$$

අගයන්න.

10. (i) කෝටික අගයන් **පහක්** භාවිත කර (අ) ත්‍රපීසාභ නීතිය (ආ) සිම්සන් නීතිය යොදමින්

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

දශමස්ථාන 4 කට නිමානය කරන්න.

$x = \tan \theta$ ආදේශයෙන් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ $\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx$ අගයන්න. ඒ නයින් ඔබේ නිමාන අගයෙහි නිරවද්‍යතාව නිර්ණය කරන්න. ($\pi = 3.1416$ ලෙස ගන්න.)

(ii) මැක්ලෝරින් ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර $|x| < 1$ විට $ln\,(1 + x)$ සඳහා ශ්‍රේණි ප්‍රසාරණයක් ලබා ගන්න. (සැ. යු. $ln = \log_e$)

y^{-4} පදය දක්වා y හි අවරෝහණ බලවල ශ්‍රේණියක් ලෙස $ln\, \frac{y}{y - 1}$ ප්‍රසාරණය කර දශමස්ථාන හතරකට නිවැරදි ව $ln\, 1.25$ සෙවීමට එම ප්‍රසාරණය භාවිත කරන්න.

11. $x = 3t^2 + 1$
$y = 2t^3 - 1$

පරාමිතික සමීකරණවලින් නිරූපණය කෙරෙන වක්‍රයට $t = \tan \alpha$ වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශකයේ සමීකරණය

$$y = x \tan \alpha - \tan^3 \alpha - \tan \alpha - 1$$

බව පෙන්වා වක්‍රය අනුරේඛනය කරන්න.

$t = 1$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වක්‍රයට ස්පර්ශකයක් වන රේඛාව ද අනුරේඛනය කරන්න.

12. $y^2 = 16x$ සහ $3y = 4\,(4 - x^2)$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍ර එක ම සටහනෙහි අනුරේඛනය කර පළමුවැනි වෘත්ත පාදය තුළ ඒවායේ ඡේදන ලක්ෂ්‍යය (1, 4) බව සත්‍යාපනය කරන්න.
පළමුවැනි වෘත්ත පාදය තුළ මෙම වක්‍ර දෙකෙන් හා x-අක්ෂයෙන් සපරියන්ත වර්ගඵලය සොයන්න.
මෙම වර්ගඵලය (i) x-අක්ෂය වටා ද (ii) y-අක්ෂය වටා ද භ්‍රමණය කළහොත් ජනනය කැරෙන පරිමාව සොයන්න.